

# EVALUACIÓN DEL CÁLCULO MULTIVARIABLE EN LA INGENIERÍA CON MODELOS DIDÁCTICOS EN 3D

C. Vales Pinzón<sup>1</sup>  
M. Casais Molina<sup>2</sup>  
R. López Sánchez<sup>3</sup>  
J. Contreras Rivero<sup>4</sup>

## RESUMEN

El presente trabajo presenta una propuesta de evaluación de las competencias matemáticas en asignaturas del área de ciencias básicas de la ingeniería, implementada en el curso de Cálculo Diferencial e Integral II, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán (FIUADY). Mediante un concurso de modelos didácticos en 3D, se evaluó el desempeño de productos generados para esta asignatura en estudiantes de segundo semestre de las cuatro ingenierías de la FIUADY. La planeación de esta actividad se desarrolló en academia de profesores que imparten la asignatura para realizar en todos los grupos del curso escolar. Esta actividad recibió un grado de aceptación alto por parte de los estudiantes, permitiendo la aplicación de los conocimientos recibidos en el aula, conectar los conceptos en la búsqueda de soluciones de problemas y el trabajo en equipo.

## ANTECEDENTES

El Modelo Educativo de la Formación Integral contempla la valoración del desempeño de cada estudiante en dos tipos de evaluación: de proceso y de producto. La primera consiste en pruebas de desempeño de los diferentes temas que comprende una asignatura, mientras que la evaluación de producto la integran actividades como dinámicas de aprendizaje, tareas, portafolio de evidencias, proyecto integrador, entre otras. Esto permite evaluar los diferentes aspectos y competencias propias del área de matemáticas (UADY, 2012).

El Cálculo Diferencial e Integral II es una asignatura dirigida a estudiantes de ingeniería en la cual, se presenta el concepto de funciones reales de dos o más variables, su análisis y aplicaciones a través de la graficación, derivación e integración. Tiene como propósito complementar las bases del cálculo diferencial e integral para comprender las asignaturas subsecuentes en los planes de estudios, así como para resolver problemas relacionados con la ingeniería (García, 2013 y Zúñiga, 2007). En la FIUADY esta asignatura se imparte en segundo semestre, siendo de tronco común para las cuatro ingenierías: Civil, Física, Mecatrónica y en Energías Renovables.

Uno de los retos a los que se enfrentan los estudiantes en el curso de cálculo de varias variables, es la graficación en 3D, desde el dibujo en papel hasta en el uso del software. La problemática de tema se ha relacionado con las dificultades para la visualización del espacio tridimensional, lo cual no permite una correcta interpretación geométrica de los conceptos y la realización de la matemática asociada (Gibelli, Graziani y Sanz, 2007).

Con la finalidad de que los alumnos de ingeniería contextualicen los conocimientos, desarrollen su capacidad para resolver problemas, y trabajar en equipo, se propuso la evaluación de estos aspectos mediante un concurso de Modelos Matemáticos en 3D con

<sup>1</sup> Coordinadora del Grupo Disciplinar de Ciencias Básicas. Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán. caridad.vales@correo.uady.mx

<sup>2</sup> Profesor de Carrera, Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán. melissa.casais@correo.uady.mx

<sup>3</sup> Profesor de Carrera, Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán. rlopez @correo.uady.mx

<sup>4</sup> Profesor de Carrera, Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán. jannette.contreras@correo.uady.mx

proyección a una aplicación. De esta manera, contribuir al desarrollo del pensamiento lógico y la creatividad, como competencias matemáticas (Flores-Fuentes y Juárez-Ruíz, 2017 & Rodríguez, 2015). Los objetivos que persigue esta actividad son:

- Materialización de los conceptos teóricos de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral de funciones, de dos o más variables mediante la implementación de modelos matemáticos en 3D.
- Fomentar el trabajo equipo y el espíritu de una sana competencia entre estudiantes de las cuatro licenciaturas de la Facultad de Ingeniería, y motivarlos para la búsqueda de la excelencia.
- Reconocimiento por parte del personal académico, directivos y de la comunidad estudiantil, al esfuerzo y dedicación en actividades extraordinarias relativas a su formación académica.

## METODOLOGÍA

La actividad desarrollada corresponde a una evaluación de producto a través de un proyecto integrador que finaliza en un concurso de exposición y presentación de Modelos Matemáticos en 3D.

### Proyecto Integrador: Modelos Matemáticos en 3D

Ante el objetivo de realizar un trabajo en el cual se puedan plasmar las competencias que el estudiante de ingeniería adquiere en cada una de las unidades que forman la materia de Cálculo II, se propuso la elaboración de una maqueta, en la cual se presente la superficie que genera una función de dos variables, análisis de ésta y elementos geométricos en relación con la misma. Con esta actividad se pretende que los estudiantes demuestren el alcance de las siguientes competencias (FIUADY, 2014):

- Resolución de problemas de la física y la geometría con aplicaciones a la ingeniería, representados por modelos matemáticos, utilizando conceptos de cálculo diferencial e integral de funciones de dos o más variables
- Utiliza los conceptos de geometría analítica tridimensional para representar gráficas de líneas y superficies.
- Análisis de funciones de dos o más variables para representarlas en el espacio, apoyándose en los conceptos de definición de una función, límites y continuidad.
- Resolución de problemas geométricos y modelos matemáticos para la obtención de valores extremos en situaciones relacionadas con el área de ingeniería mediante los conceptos de derivación parcial.
- Cálculo de áreas y volúmenes de superficies en problemas geométricos basándose en los conceptos de integración múltiple.
- 

El proyecto fue diseñado en academia y se aplicó en los grupos que cursaban la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral II. Los estudiantes se organizaron en equipos de cinco integrantes. El profesor de la asignatura entrega a cada uno de los equipos un documento con la función de estudio, los datos que se les solicitaba obtener y analizar.

### Planteamiento del problema

Tras el planteamiento del problema que se presenta en la Figura 1, se le solicitó al equipo el análisis de la función, la graficación en 3D, generación de mapa de curvas de nivel

representativo para la función. A través de derivadas parciales de funciones de dos variables, para determinar puntos máximos y mínimos, rectas tangentes y planos normales a la superficie; asimismo se evaluó el uso de integrales dobles para el cálculo del área superficial.

“Considere un experimento en el que un sujeto realiza un trabajo mientras se encuentra expuesto a dos estímulos diferentes: sonido y luz. Para niveles bajos de los estímulos, el rendimiento del sujeto puede realmente mejorar, pero cuando los estímulos aumentan, se convierten en distractores y el rendimiento empieza a deteriorarse. Suponga un cierto experimento en el que se aplican  $x$  unidades del estímulo A (sonido) y unidades del estímulo B (luz). Si el rendimiento del sujeto está medido a través de la superficie representada por el modelo matemático dado en la Figura 1.”

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2} + x^2 - y^2\right) e^{(1-x^2-y^2)}$$

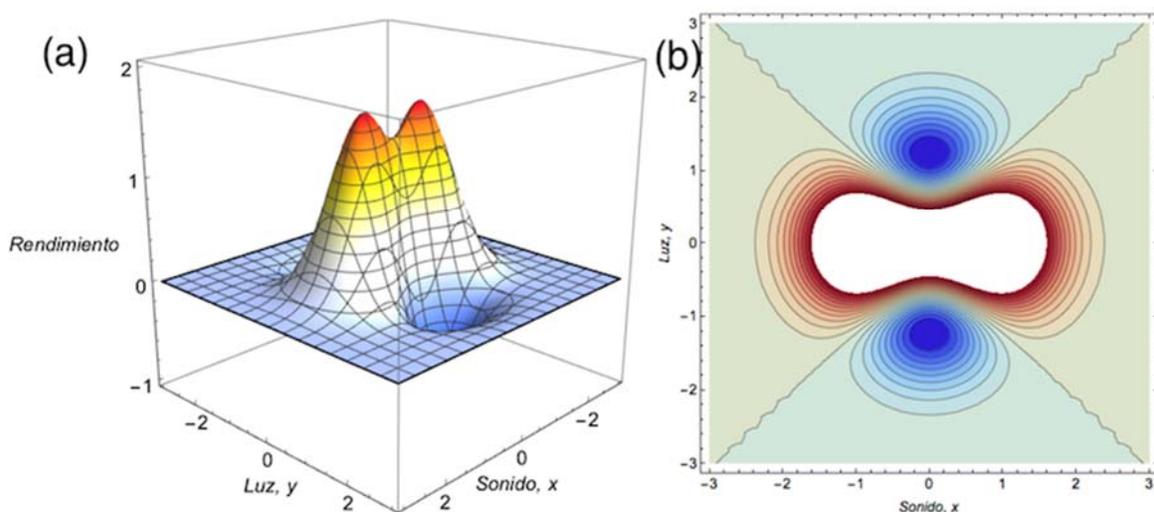


Figura 1. Problema planteado y función de análisis. Representación gráfica del rendimiento de un sujeto en función de dos estímulos: sonido y luz, utilizando el modelo matemático propuesto en la ecuación.

Elaboración propia

El equipo de trabajo entrega en un reporte académico, el análisis realizado con la gráfica de la función, procedimiento para la obtención de los puntos críticos, análisis de los valores extremos, cálculo de la ecuación del plano tangente y la recta normal, y cálculo del área de la superficie. Y se particularizan los siguientes apartados:

- Dificultades enfrentadas durante el desarrollo del proyecto. Esto permite al alumno identificar sus competencias en el área analítica y de diseño.
- Evaluación de cada uno de los otros integrantes del equipo durante la participación en el desarrollo del proyecto. Este punto permite identificar la coordinación y desempeño del trabajo en equipo.
- Conclusiones personales. Enfocado a la valoración del proyecto final y los saberes obtenidos en el curso que logren ser plasmados.

Asimismo, los estudiantes elaboran y presentan una maqueta de la superficie (ver Figura 1), en la cual se identifiquen todos los elementos solicitados en los cálculos. Los materiales para utilizar y las dimensiones se dejaron a libre elección de los estudiantes.

### De la evaluación de proyectos

Se estableció la fecha de entrega y presentación del proyecto, en la cual todos los equipos debían exponer sus maquetas ante el personal académico, directivos y alumnado. Cada maqueta fue evaluada por un jurado calificador con base en una rúbrica elaborada por los profesores de la asignatura. Previamente a la exposición, el equipo envía su reporte con los análisis y conclusiones correspondientes para que éste pueda ser evaluado por el profesor de asignatura, señalando de ser necesario, correcciones en los cálculos.

Los estudiantes realizan una autoevaluación de sus proyectos y de la actividad a través de la inclusión de sus comentarios en el reporte. De esta manera, es posible evaluar el grado de aceptación de este tipo de acciones, no sólo relativas al aspecto pedagógico-didáctico, sino también en su desempeño y académico.

El jurado calificador lo integraron profesores del Grupo Disciplinar de Ciencias Básicas que imparten la asignatura de Cálculo II. Durante 1 hora y 30 min, las maquetas de los estudiantes fueron evaluadas. Los equipos debían permanecer junto a su maqueta y se explicar la elaboración y contenido de ésta. Se analizaron tres características: Información contenida, diseño y creatividad. De cada característica se evaluaron dos conceptos

- Información Contenida: Se revisó que contuviera el tema principal, elementos básicos de un sistema tridimensional, cálculos solicitados, así como la conexión entre conceptos geométricos que abarca el proyecto.
- Diseño: La representación y organización de los elementos en la maqueta.
- Creatividad: El impacto, que mide la originalidad, así como la calidad y presentación de la maqueta.

Cada uno de estos conceptos se evaluó con base en una escala de competencias, calificando como competente autónomo, competente destacado, competente satisfactorio y no competente el trabajo en los diferentes conceptos como se describe en la Tabla 1.

**Tabla 1.** Rúbrica de evaluación del proyecto

		CALIFICACIÓN			
	Concepto	Competente Autónomo (1)	Competente Destacado (0.75)	Competente Satisfactorio (0.5)	No Competente (0)
<b>Información Contenida</b>	<b>Tema principal</b>	La maqueta contiene todos los elementos visuales descriptivos relacionados con el tema. El alumno explica el tema correctamente.	La maqueta contiene algunos de los elementos visuales descriptivos relacionados con el tema. El alumno explica el tema correctamente.	La maqueta contiene pocos elementos visuales descriptivos relacionados con el tema	La maqueta no contiene elementos visuales descriptivos relacionados con el tema

	<b>Conexión de conceptos</b>	Los elementos se encuentran y explican en forma lógica, entendible y relacionada con el tema	Los elementos se encuentran y explican en forma lógica y relacionados con el tema	Los elementos que se presentan carecen de lógica, la explicación es poco entendible	Los elementos que se presentan, no tienen lógica con el tema
<b>Diseño</b>	<b>Representación</b>	La maqueta del experimento es acorde al tema principal y muestra consideraciones particulares del experimento	La maqueta del experimento es acorde al tema principal.	La maqueta del modelo está diseñada acorde con algunos puntos del tema	La maqueta del experimento está diseñada en desacuerdo con el tema.
	<b>Organización</b>	Los objetos usados para representar los elementos reflejan un excelente grado de creatividad y originalidad. Contiene aportaciones al tema	Los objetos usados para representar los elementos reflejan un excelente grado de creatividad y originalidad	Los objetos usados para representar los elementos reflejan un excelente grado de creatividad	La maqueta carece de originalidad y no contiene aportaciones
<b>Creatividad</b>	<b>Impacto</b>	La maqueta se encuentra limpia y ordenada. Muestra considerablemente atención en su construcción, sus componentes están presentados con nítidos detalles.	La maqueta se encuentra limpia. Muestra atención en su construcción, sus componentes están presentados con algunos detalles.	La maqueta se encuentra con algunas deficiencias de limpieza. Muestra algo de atención en su construcción, pocos detalles.	La maqueta se encuentra sin calidad de presentación. La maqueta fue construida descuidadamente.
	<b>Calidad y presentación</b>	La maqueta se encuentra limpia y ordenada. Muestra considerablemente atención en su construcción, sus componentes están presentados con nítidos detalles.	La maqueta se encuentra limpia. Muestra atención en su construcción, sus componentes están presentados con algunos detalles.	La maqueta se encuentra con algunas deficiencias de limpieza. Muestra algo de atención en su construcción, pocos detalles.	La maqueta se encuentra sin calidad de presentación. La maqueta fue construida descuidadamente.

Fuente: Elaboración Propia

## RESULTADOS

Este evento se realizó para la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral II, al finalizar el curso enero-mayo 2016 en las instalaciones de la FIUADY. Se llevó a cabo la exposición de un total de 29 maquetas de modelos matemáticos en 3D, correspondientes a cinco grupos con un total de 129 alumnos participantes tal como se aprecia en la Figura 2.

Entre los aspectos con mayor puntuación en la evaluación se resalta el dominio en el tema y la conexión de los conceptos. Logrando los estudiantes exponer de manera lógica cada uno de los elementos evaluados. Asimismo, las maquetas mostraron buena organización, presentación y originalidad. En buena medida los equipos se apoyaron del uso de software de graficación, desarrollando presentaciones durante su exposición y valiéndose de estos para el cálculo en el análisis.

Tras la deliberación del jurado calificador con base en el puntaje obtenido en la evaluación y las observaciones para cada equipo, se eligió un equipo ganador del primer lugar y seis menciones honoríficas para los equipos de mayor puntaje.



*Figura 2.* Alumnos de los cursos de Cálculo Diferencia en Integral II, participantes del concurso Modelos Matemáticos en 3D.

Elaboración propia

La ceremonia de premiación se llevó a cabo el mismo día del evento. A cada uno de los equipos se le entregó una constancia de participación en el evento. Los equipos galardonados recibieron su reconocimiento a cargo del Secretario Académico y los profesores de la asignatura de Cálculo II. La FIUADY premió con artículos promocionales de la Universidad al equipo ganador del primer lugar, quienes presentaron un trabajo correctamente integrado y original como se puede apreciar en la Figura 3. El reconocimiento del trabajo causó motivación entre los estudiantes por participar en este tipo de eventos, además de que, la socialización del conocimiento entre todos los grupos mediante el trabajo en academia fue uno de los aspectos mejor calificados.



*Figura 3.* Alumnos ganadores del primer lugar del concurso Modelos Matemáticos en 3D junto a los profesores de la asignatura, pertenecientes al Grupo Disciplinar de Ciencias Básicas, y al Secretario Académico de la FIUADY.

Elaboración propia

Los trabajos presentaron creatividad en la representación e interpretación de elementos de geometría en 3D. El estudiante de cálculo demostró dominio en la visualización y materialización objetos tridimensionales.

### **Comentario de los estudiantes**

A través de las conclusiones en los reportes enviados y evaluación del evento mediante una encuesta de opinión, los estudiantes externaron sus comentarios y sugerencias acerca de la actividad, los cuales permite analizar los puntos a resaltar y fortalecer para este tipo de actividades. El trabajo resultó interesante desde la graficación hasta la ejecución de la maqueta. La mayor valoración fue en la conexión de las ideas y conceptos. Sin embargo, el mayor estrés lo reflejaron en la elaboración de la maqueta. Algunos estudiantes manifestaron frustración durante el proceso, pero lograron conectar el trabajo en equipo y motivarse para lograrlo.

Los estudiantes expresaron su sentir y visión como futuros profesionistas al mencionar que, el proyecto les permitió demostrar su ingenio y habilidades ante las dificultades de un proyecto, y que éstas surgen para dar la mejor solución posible. Definiendo a un ingeniero como aquel que puede crear, proponer e implementar soluciones a los problemas que se le presenten.

El proyecto puso en práctica las habilidades tecnológicas y conocimientos obtenidos a lo largo del curso de Cálculo Diferencial e Integral II, así como también la creatividad al momento de modelar la función en 3D. La parte de analizar un modelo matemático de tipo multivariable y descomponerlo, utilizando las herramientas del cálculo, resultó para los estudiantes interesante y demandante. Por otra parte, la etapa de construcción de elementos

físicos para representar la superficie fue crucial y necesitó de creatividad, constancia y trabajo colaborativo. Esto último, fue altamente valorado, así como compartir sus experiencias con los compañeros de otros grupos de la misma asignatura y diferentes ingenierías.

## CONCLUSIONES

A través de un concurso de modelos didácticos en 3D se evaluó el desempeño de productos generados para la asignatura de Cálculo Diferencial II en estudiantes de segundo semestre de ingeniería de la FIUADY. Los estudiantes tuvieron la oportunidad de desarrollar un proyecto con vista de aplicación, representarlo físicamente y defenderlo ante la evaluación de un jurado integrado por profesores de la asignatura, así como la evaluación de sus pares.

Los estudiantes proyectaron en el desarrollo de sus trabajos esfuerzo y esmero, además de ofrecer contenidos claros y bien desarrollados, demostrando dominio de cada uno de los temas que cursaron en la asignatura. La habilidad de pensamiento espacial demostrada por los estudiantes es esencial desarrollarla en las carreras de ingeniería y ciencias, esto permite al alumno la interpretación, representar, planteamiento de soluciones, manejo de información en la resolución de problemas.

El trabajo en academia fue de alta satisfacción por parte de los estudiantes ya que todos los grupos de la asignatura durante ese curso contaron con el mismo nivel del contenido teórico y fueron evaluados equitativamente. Además, de que pudieron compartir sus conocimientos, dudas e ideas con un gran número de estudiantes del mismo nivel, para las cuatro ingenierías impartidas en la FIUADY.

Esta actividad se reforzó con los comentarios que los estudiantes y profesores de la FIUADY y se propone para continuar siendo aplicada en diferentes cursos, ampliando las funciones generadoras de las superficies en 3D y enlazando el contenido con aplicaciones en las diferentes áreas de la ingeniería y ciencias exactas.

## BIBLIOGRAFÍA

- Facultad de Ingeniería-UADY (2014). *Plan de Estudios de Licenciatura*. México: Universidad Autónoma de Yucatán. Recuperado de: [http://www.ingenieria.uady.mx/licenciaturas/civil/archivos/Obligatorias\\_Civil-MEFI.pdf](http://www.ingenieria.uady.mx/licenciaturas/civil/archivos/Obligatorias_Civil-MEFI.pdf)
- Flores-Fuentes, G. y Juárez-Ruíz, E. (2017). Aprendizaje basado en proyectos para el desarrollo de competencias matemáticas en bachillerato. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, Vol. 19(3), pp. 71-91. Recuperado de: <http://redie.uabc.mx/redie/article/view/721>
- García, J. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación*, Vol. 37 (1), pp. 29-42. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/html/440/44028564002/>
- Rodríguez, F. S. (2015). Impacto de programas académicos exitosos en la formación de ingenieros. *Revista ANFEI Digital*, Vol. 3, pp. 1-11. doi: <http://anfei.org.mx/revista/index.php/revista/article/view/195/690>

- Gibelli, T., Graziani, A. y Sanz, C. (2017). Revisión de herramientas para la creación de modelos 3D orientados a la enseñanza de la matemática con realidad aumentada. Ponencia presentada en *el XXIII Congreso Argentino de Ciencias de la Computación - CACIC - 2017*. La Plata, Argentina, pp. 408-417. Recuperado de: <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/63628>
- Universidad Autónoma de Yucatán (2012). *Modelo Educativo para la Formación Integral*. México: Dirección General de Desarrollo Académico-UADY. Recuperado de: [http://www.dgda.uady.mx/media/docs/mefi\\_dgda.pdf](http://www.dgda.uady.mx/media/docs/mefi_dgda.pdf)
- Zuñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. Vol. 10, pp.145-175. Recuperado de: <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v10n1/v10n1a7.pdf>