LA DEBILIDAD DE LA COMPRENSIÓN DE UN CONCEPTO FUNDAMENTAL MATEMÁTICO PARA LA FORMACIÓN DE INGENIEROS

THE WEAKNESS OF UNDERSTANDING A FUNDAMENTAL MATHEMATICAL CONCEPT FOR THE TRAINING OF ENGINEERS

C. Pérez Córdova[1]
S. Contreras Bonilla[2]
J. L. Macias Ponce[3]
Y. L. De Castilla Rosales[4]

RESUMEN
El Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) publicó que aproximadamente el 66% de los alumnos que ingresan al nivel Superior en el área de las ingenierías y tecnologías, muestran dificultad en la comprensión de las operaciones con fracciones. Por lo anterior, el Cuerpo Académico CA- 237 de la Facultad de Ingeniería de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) ha analizado esta situación, aplicando un test a alumnos de tres grupos que han cursado las matemáticas del área básica de la ingeniería, corroborando las afirmaciones del INEE. El trabajo aporta una solución que clarifica el significado de la operación y del resultado a partir de una propuesta semántica y otra metodológica. Para apoyarlas se elaboró un programa computacional que clarifica a ambas.

ABSTRACT
The National Institute of Educational Evaluation (INEE) published that approximately 66% of the students who enter the Higher level in the area of engineering and technologies show difficulty in understanding operations with fractions. Therefore, the Academic Body CA-237 of the Faculty of Engineering of the Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) has analyzed this situation through a test of students from three groups who have studied mathematics in the basic area of engineering, corroborating the statements of the INEE. The work provides a solution that clarifies the meaning of the operation and the result from a semantic and a methodological proposal. To support them, a computer program was developed that clarifies both.

ANTECEDENTES
La matemática es el eje transversal de la mayor parte del conocimiento. Ésta es muy amplia y su estudio formal se inicia desde los primeros ciclos escolares. El trabajo que se presenta incide en una parte pequeña y básica, no por ello carece de importancia; se trata de la división de una fracción entre otra fracción, y se limita a fracciones del tipo n/d, en las que n y d son números enteros positivos incluyendo el 1, y excluyendo el 0.

Como todo trabajo de investigación, por muy modesto que sea, parte de un problema. El que da origen a éste, es:

[1] Profesor Investigador de la Facultad de Ingeniería. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. cesarperezcordova@hotmail.com
[2] Profesora Investigadora de la Facultad de Ingeniería. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. silvia.contreas@correo.buap.mx
[3] Profesor Investigador de la Facultad de Ingeniería. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. joseluis.macias@correo.buap.mx
[4] Profesora Investigadora de la Facultad de Ingeniería. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. yatzuki@gmail.com

"La división entre dos fracciones es una operación aritmética cuyo procedimiento para hallar el resultado es extremadamente fácil, pero sólo un porcentaje pequeño de estudiantes, desde nivel básico hasta licenciatura, pueden explicar su significado, el del resultado, y dar un ejemplo en el ámbito de la vida cotidiana"

El propósito es clarificar a los estudiantes el significado de una operación que, a pesar de que corresponde a nivel básico, nunca llegaron a comprenderla.

No es aceptable que un ingeniero pueda resolver con facilidad una operación de división entre fracciones de forma mecánica sin comprenderla, pues esto lo limita a utilizarla como herramienta de cálculo en la resolución de problemas y no es un justificante la complejidad del conocimiento (Bruner,2011).

El objetivo es apoyar a la formación de todo ingeniero para que sean críticos y creativos y no simples obreros de la ingeniería; además, mostrar una ausencia de comprensión que para la mayoría de estudiantes y profesores resulta sorpresiva. En cuanto a las autoridades educativas del más alto nivel, este problema les muestra que no están proporcionando a los profesores los conocimientos con un análisis epistemológico, ni realizando una investigación y difusión que apoye la verdadera calidad educativa, que no depende sólo de instalar computadoras, mucho menos de aumentar antipedagógicamente los horarios de clase.

Es prudente mencionar que, como este pequeño problema, existen muchos vacíos en nuestra educación, y valga la pena mencionar como ejemplos el razonamiento lógico matemático, y la traducción de enunciados verbales a lenguaje algebraico, que los libros de texto abordan superficialmente en el mejor de los casos. Esto es una pequeña muestra de ausencia de significados según Ausbel *et al.* (1983). En el aprendizaje de las matemáticas esta ausencia va acompañada de una crítica a la semántica confusa, este trabajo acompaña con una propuesta escrita y plasmada en un programa de cómputo información para apoyar su comprensión. Se considerará de un gran valor en cuanto incida en un problema toral de la educación.

La hipótesis del trabajo es "Con un pequeño, pero valioso cambio semántico y un método claro, puede comprenderse el significado de la división de fracciones y realizarse su cálculo de forma lógica en lugar de simplemente mecánica"

METODOLOGÍA

La validación de la investigación se realizó aplicando un test breve a tres grupos de 47 estudiantes de distintas licenciaturas de ingeniería y tecnología, cuyo avance promedio es mayor al 30%, lo que implica que ya han cursado matemáticas superiores. Las preguntas fueron:

1. Resuelve la operación aritmética siguiente y escribe el resultado (cociente)

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$$

2. Explica cuál es el significado del resultado.
3. Menciona ¿cuál es la razón de la forma en que se realiza la operación?
4. Describe un ejemplo de la vida cotidiana donde se aplique esta operación.

Los resultados de los test aplicados a los tres grupos fueron interesantes, debido a que muestran la carencia del razonamiento de una operación aritmética, Tabal 1.

Tabla 1. *Resultados del test aplicado a tres grupos*

Pregunta	No de respuestas correctas
Obtención del resultado numérico	**141**
Explicación del significado del resultado	**12**
Razón de la forma de la operación	**0**
Ejemplo cotidiano	**6**

Es interesante relatar que, después de analizar los resultados obtenidos del test aplicado a los tres grupos, se planteó el mismo problema en una conferencia, en forma de preguntas sucesivas, a un auditorio de estudiantes y profesores de tres universidades latinoamericanas, a quienes causo sorpresa. Se describe en forma breve el diálogo entre ponente y asistentes:

(**P**=profesor ponente, **A**=auditorio de estudiantes y profesores)
P: ¿Pueden obtener el resultado de la operación: **6 ÷ 3 =?**
A: **6 ÷ 3 = 2**
P: ¿Comprenden bien la operación?, ¿Saben el significado del resultado? ¿Pueden ilustrar la operación con un ejemplo real?
A: Si repartimos **6** manzanas entre **3** niños, le tocan **2** manzanas a cada niño.
P: ¿Si cambia un número pueden realizar la misma operación e ilustrarla con un ejemplo?
A: ¡Sí!
P: ¿**6 ÷ ⅓ =?**
A: **6 ÷ ⅓ = 18**
P: Ilustren el significado de la operación y el resultado con un ejemplo con manzanas y niños.
A: El silencio se hizo, luego de un lapso de tiempo alguien dice que 6 manzanas tienen 18 tercios, otro tímidamente pregunta algo interesante "¿un tercio de niño?", por último, alguien justifica la razón del resultado describiendo la multiplicación cruzada:

No se reciben más respuestas.

$$\frac{6}{1} \div \frac{1}{3} = \frac{18}{1}$$

Finalmente, el ponente explica, que está relacionada con las 2 primeras respuestas, en un auditorio de 300 asistentes, respuesta que se aborda de manera más amplia en seguida.

Análisis de la operación

Partiendo de la pregunta inicial: **6 ÷ 3,** se puede concluir que hay dos significados para la operación:

a. **3 cabe 2 veces en 6**. Entonces, caben 2 veces 3 manzanas, en una caja para 6.
b. Si se reparten 6 manzanas entre 2 personas, **le tocan 2 a cada una** (2 manzanas a 1 persona).

Al reunirse los docentes del Cuerpo Académico (CA-237) de la Facultad de Ingeniería de la BUAP y realizar una reflexión con las dos experiencias mencionadas anteriormente, surge la inquietud de presentar una propuesta semántica que una vez analizada aporte un beneficio al razonamiento de la operación, y al mismo tiempo, una metodología que se explique con el apoyo de un simulador.

Entonces, en uno de los reactivos que se aplicó a los tres grupos que se mencionan (141 alumnos) de la institución se propone una operación más general: Dividir una fracción entre otra fracción.

La operación fue la división:

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$$

Esta operación se resuelve con dos simples multiplicaciones cruzadas, y el resultado es: **15/8**. Pero, si se trata de *entender el significado de la operación, del resultado y, más aun, ejemplificarla*, aflora el problema que se mencionó en el test a los tres grupos. Por lo que, se establece dos consideraciones previas a la propuesta didáctica.

Primera consideración. Si en una división entre 2 números, se divide individualmente al dividendo y al divisor entre un mismo número cualquiera, el resultado no se altera:

12 ÷ 4 = 6 ÷ 2 = 3 (ambos números se dividieron entre 2, y el resultado no se alteró)

De igual manera ocurre en la división:

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$$

Si ambas fracciones se dividen entre 2, por ejemplo, el resultado no se altera.

Segunda consideración. Dividir una fracción (**n/d**) entre un número **p,** puede hacerse de dos maneras:

Dividiendo el numerador entre **p:**

$$\frac{n}{d} \div p \qquad\qquad \frac{2}{4} \div 2 = \frac{1}{4}$$

o multiplicando el denominador por **p:**

$$\frac{n}{d} \times p \qquad\qquad \frac{2}{4} x2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Propuesta para entender el significado operacional de la división de fracciones.

Se toma como ejemplo la operación:

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$$

"Tres cuartos **entre** dos quintos"

"Tres cuartos de manzana **entre** dos quintos de niño"

¿Qué significado tiene la palabra **ENTRE**? y ¿Cuánta claridad aporta a la operación?

Año 8, No. 13, Enero - Diciembre de 2021 | ISSN: 2395-9878

La ***propuesta semántica*** consiste en cambiar la palabra **ENTRE** por la palabra **PARA**

$$\frac{3}{4}\ \textbf{para}\ \frac{2}{5}$$

“Tres cuartos **para** dos quintos”

“Tres cuartos de manzana **para** dos quintos de niño” Figura 1.

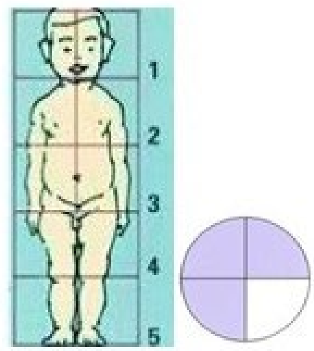

Figura 1. *Representación gráfica de la primera operación.*
Elaboración propia

Siendo el resultado de la operación, lo que corresponde a 1 unidad, El cambio semántico de **ENTRE** por **PARA** da una idea más clara del significado de la operación y del resultado, y de ejemplificarlos; además, visualizar el resultado aproximado, que en el ejemplo es:
¾ para los primeros 2/5
¾ para los siguientes 2/5
Faltaría lo que corresponde a 1/5
Este último problema se resuelve con la segunda propuesta, la metodológica, que consiste en transformar la operación de tal modo que las dos fracciones de la división

$$\frac{n1}{d1}\ \textbf{para}\ \frac{n2}{d2}$$

se transformen sin alterar el resultado, haciendo que **n2 = 1**, para lo que deben dividirse las dos fracciones entre **n2,** dividiendo **n2** entre sí mismo y multiplicando **d1** por **n2.** En el ejemplo numérico

$$\frac{3}{4}\times 2\ \ \textbf{para}\ \frac{2}{5}\div 2$$

Se transforma, sin alterar el resultado en:

$$\frac{3}{8}\ \textbf{para}\ \frac{1}{5}$$

Si 3/8 son **PARA** 1/5, entonces 5 veces (3/8) = 15/8 son **PARA** 1 Unidad. Figura 2

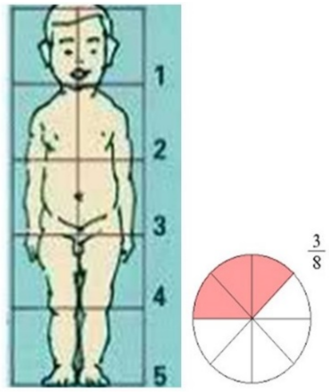

Figura 2. *Representación gráfica de la segunda operación*

Aprendizaje esperado.

- El estudiante comprenderá exactamente lo que significa dividir una Fracción entre otra Fracción (propias o impropias).
- Aunque el estudiante siga utilizando la "regla del cocol", también podrá hacer el cálculo, mental y razonadamente.
- El estudiante sabrá cómo y cuándo aplicar de manera correcta la División de Fracciones.
- El estudiante conocerá el **procedimiento** (multiplicación cruzada) y el **método**, lo que lo podrá llevar más lejos en su aprendizaje.

Si estos cuatro puntos mencionados se logran con un cambio semántico tan sencillo, se estará reforzando la capacidad analítica que todo ingeniero debe tener para ser capaz de solucionar problemas del área de su especialidad.

Programa de División de Fracciones

En cuanto a la programación computacional, de la que se muestra un ejemplo, es de tipo heurística y promueve la reflexión sobre la razón y validez del método para lograr un aprendizaje verdadero.

Para Piaget (2003) a la epistemología le interesa la validez del conocimiento, pero también las condiciones de acceso al conocimiento válido; de ahí que el sujeto que adquiere el conocimiento no sea irrelevante para la epistemología, sino que ésta debe ocuparse también de la génesis de los enunciados científicos y de los múltiples aspectos de la ciencia que trascienden la dimensión estrictamente lingüística y lógico-formal. La epistemología para Piaget tiene además un carácter fundamentalmente científico, es decir, teórico y empírico, no metodológico y práctico.

A continuación, se muestran los pasos de una ejecución del programa de cómputo que fue hecho especialmente para exponer la didáctica presentada.

La primera pantalla nos da la opción de introducir manualmente las fracciones o generarlas aleatoriamente, lo que permite resolver fácilmente varios problemas. En este caso se seleccionó la opción manual para introducir el ejemplo discutido. Ahora nos indica que se escriban las Fracciones y se ejecuten los pasos en orden, Figura 3.

Al pulsar el paso 1 se muestra que ¾ son para 2/5, iluminados en color rosa. Se indica en la ventana izquierda, cómo se convertirá el 2º numerador en 1, Figura 4.

Al ejecutar el paso 2, se muestra de forma numérica y gráfica que 3/8 son para 1/5 (le corresponden a 1/5), Figura 5.

Finalmente, al ejecutar el paso 3 se muestra que 15/8 son para 1 unidad. Resultado de la división de las Fracciones, Figura 6.

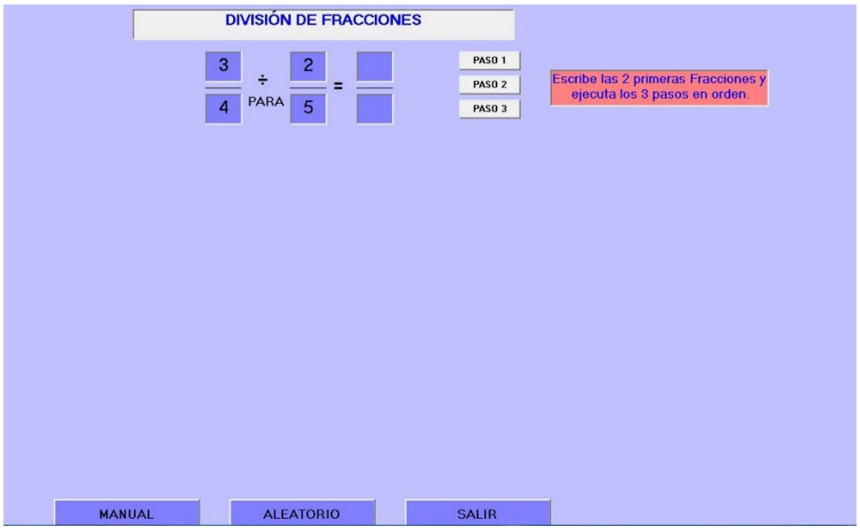

Figura 3. *Ingreso de las dos fracciones del ejemplo descrito*

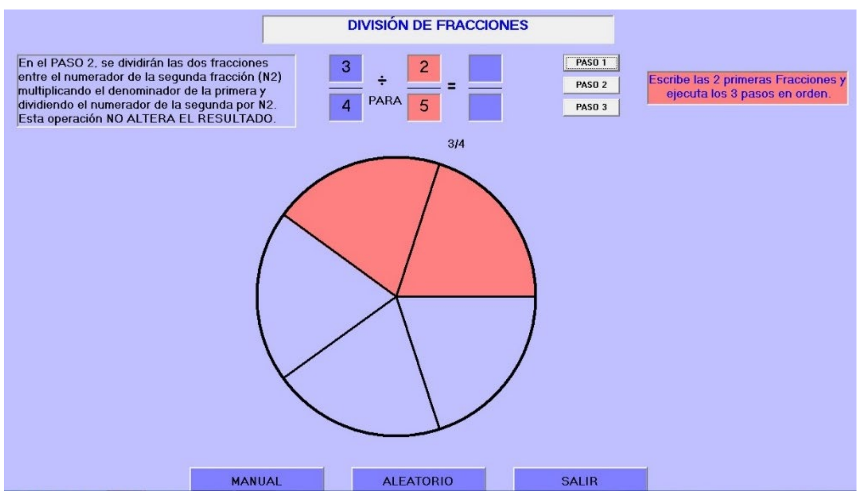

Figura 4. *Muestra visual del valor de ¾ en el gráfico*

Año 8, No. 13, Enero - Diciembre de 2021 | ISSN: 2395-9878

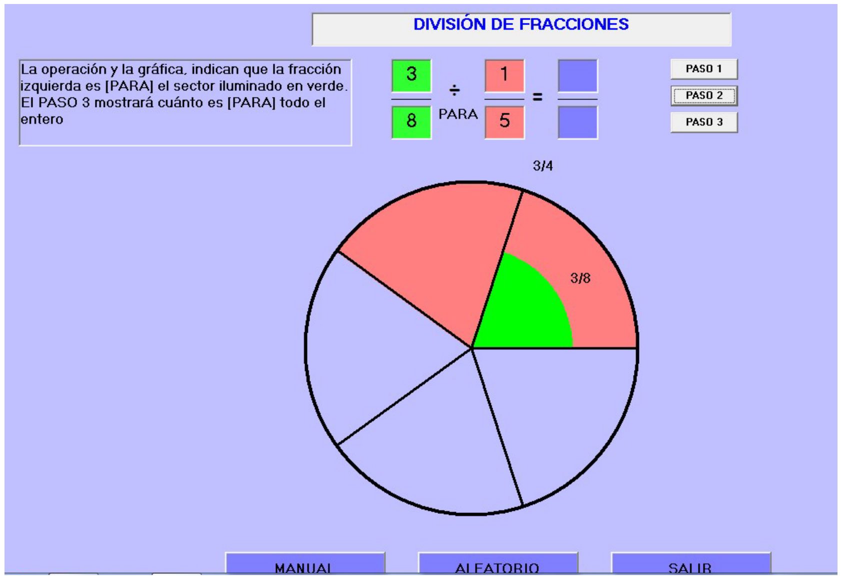

Figura 5. *Ejecución del segundo paso*

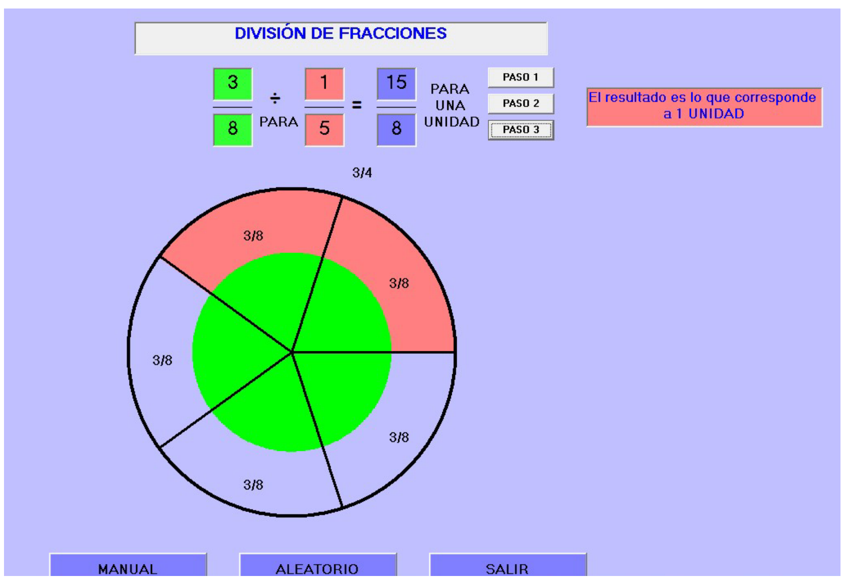

Figura 6. *Ejecución del tercer paso*

RESULTADOS

Se acaba de mostrar con un pequeño, pero valioso **cambio semántico y un método claro**, que puede comprenderse el significado de la división de fracciones y realizar su cálculo de forma comprensiva en lugar de mecánica, lo que valida el propósito y la hipótesis iniciales.
¿Qué tan importante es que el alumno desde el nivel básico hasta el nivel universitario comprenda lo que hace, si ya conoce procedimientos prácticos que le permiten hacerlo fácilmente y lograr el mismo resultado, aunque no comprenda su significado?

Se presenta en este documento una parte de lo que se ha hecho en la Facultad de Ingeniería sobre Innovación Educativa (Pérez *et al.*, 2017). Sólo en cuanto a fracciones, se cuenta con todo un conjunto de métodos y programas de simulación como apoyo para su comprensión. Los programas de simulación omiten el pragmatismo fácil del **procedimiento y asumen la responsabilidad epistemológica de validar el conocimiento** y desarrollar un pensamiento crítico y creativo.

CONCLUSIONES

Se considera que una parte importante de la investigación educativa debe orientarse a encontrar los obstáculos epistemológicos del aprendizaje, es decir, aquellas dificultades intrínsecas de cada conocimiento, y a partir de ellos diseñar o mejorar métodos de enseñanza. Un aspecto importante es apoyarse en la tecnología de manera creativa. No pensar que la tecnología es la solución por sí misma, sino sólo un medio, una herramienta que puede servir para aumentar la claridad de los conceptos. Además, un buen maestro lo puede ser con o sin tecnología, pero si ésta está disponible hay que utilizarla.

Finalmente, se tendría que hacer un llamado a las autoridades educativas para solicitar la actualización de las metodologías de enseñanza en el nivel básico, ya que, esto conlleva a la falta de razonamiento matemático, que es una parte importante en la formación profesional de los futuros ingenieros.

BIBLIOGRAFÍA

Ausubel, D. Novak, J. y Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. Trillas

Bruner, J. (2011). *Aprendizaje por descubrimiento (8ª Ed.)*. Iberia

Pérez, C., Contreras, S. y Macías, J. (2017). *Simuladores en temas básicos de matemáticas para nivel medio superior*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Piaget, J. (2003). *Aprendizaje y desarrollo*. Ediciones UNAM Facultad de Psicología